ZADANIE 104
WYZNACZANIE PRĘDKOŚCI DZWIĘKU METODĄ CZASU PRZELOTU

Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest wyznaczenie prędkości dźwięku metodą pomiaru czasu przelotu fali dźwiękowej między głośnikiem a mikrofonem.

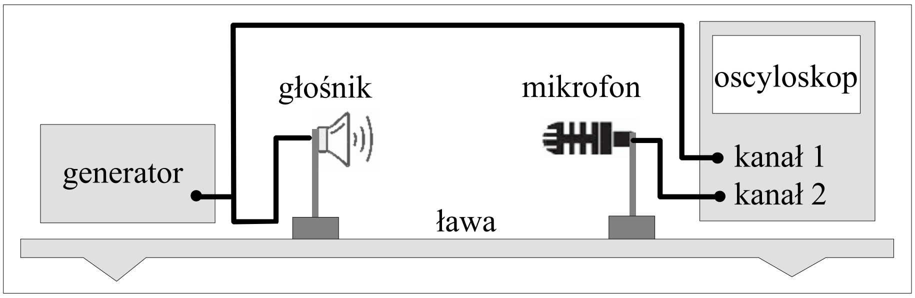
Masz do dyspozycji
- generator akustyczny;
- głośnik;
- mikrofon;
- ławę z miarką, na której umieszczony jest głośnik i mikrofon;
- oscyloskop;

W ćwiczeniu głośnik emituje falę dźwiękową o wysokiej częstości, niesłyszalną dla ucha.

Wykonanie ćwiczenia

Opóźnienie między sygnałami z mikrofonu i głośnika można wyznaczyć na oscyloskopie na dwa sposoby:
- wykorzystując dostępne wśród funkcji oscyloskopu kursory, które pozwalają mierzyć na osi czasu pozycję wybranych punktów sygnałów;
- zliczając liczbę długości fali, bądź jej części (połówek, ćwiartek,…), o jaką sygnał z głośnika wyprzedza sygnał z mikrofonu.

Część I
- Zestaw obwód według schematu na Rysunku 1.



Rys. 1. Schemat układu pomiarowego

- Ustaw oscyloskop w trybie YT (w trybie z podstawą czasu) – upewnij się, że na ekranie widzisz odpowiedzi z obu kanałów.
- Zmieniając częstość sygnału wytwarzanego przez generator, poszukaj sygnału z mikrofonu w okolicy 40 kHz.
- Sprawdź, czy sygnał z mikrofonu przesuwa się względem sygnału z głośnika przy zmianie odległości między głośnikiem a mikrofonem.
- Dla szeregu pozycji mikrofonu zmierz, wykorzystując funkcję kursorów, położenie na osi czasu sygnału z mikrofonu.
- Powtórz pomiary przy częstości w okolicy 50 kHz.
- Zastanów się nad problemem dokładności pomiaru czasu za pomocą oscyloskopu.

Część II
- Ustaw oscyloskop w trybie XY – upewnij się, że na ekranie widzisz elipsę.
- Sprawdź, czy przy zmianie odległości między głośnikiem a mikrofon zmienia się kształtu elipsy.
- Dla szeregu położeń mikrofonu zmierz jego pozycję przy wybranych kształtach elipsy.
- Powtórz pomiary przy drugiej częstości dźwięku.
- Zastanów się nad problemem dokładności z jaką zliczasz na ekranie oscyloskopu wielokrotności długości, połówek, ćwiartek,... fali.
- Odnotuj temperaturę panującą w pracowni.

Jeśli masz kłopoty z obsługą oscyloskopu, poproś osobę prowadzącą ćwiczenie o pomoc.

Literatura przedmiotu

- J. Ginter, *Fizyka fal – Fale w ośrodkach jednorodnych, Fale w ośrodkach niejednorodnych*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 1993;
- Sz. Szczeniowski, *Fizyka doświadczalna*, cz. I, *Mechanika*, PWN, Warszawa, 1972,
- B. Jaworski i A. Dietłaf, *Kurs fizyki*, tom 3, *Procesy falowe, optyka, fizyka atomowa i jądrowa*, PWN, Warszawa, 1981, s. 469,
- D. Holliday, R. Resnick i J. Walker, *Podstawy fizyki*, tom 3, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 2008;
- A. Zięba, *Analiza danych w naukach ścisłych i technice*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 2013.

ZADANIE 104

WYZNACZANIE PRĘDKOŚCI DZWIĘKU METODĄ CZASU PRZELOTU

Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest wyznaczenie prędkości dźwięku metodą pomiaru czasu przelotu fali dźwiękowej między głośnikiem a mikrofonem.

Wprowadzenie

Szereg dynamicznych zjawisk fizycznych opisuje się tzw. **klasycznym równaniem falowym**, czyli liniowym, cząstkowym równaniem różniczkowym drugiego rzędu:

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2},$$

gdzie wielkość $\psi(x,y,z,t)$ to np. natężenie pola elektrycznego bądź magnetycznego w fali elektromagnetycznej, ciśnienie w fali głosowej lub też przesunięcie w pobudzonym do drgań ośrodku ciągłym, przy czym wielkości te obserwujemy w punkcie przestrzeni określonym współrzędnymi x, y i z oraz w chwili czasu t. Parametr v uważamy za liczbę dodatnią, a jej sens wyjaśnimy niżej.

Rozważmy gaz wypełniający całą przestrzeń i głośnik wysyłający falę dźwiękową w ustalonym kierunku, wzdłuż którego wybierzemy oś X. Falę ψ będzie reprezentować odchyłka $p(x,t)$ ciśnienia od tegoż ciśnienia, jakie panuje w ośrodku niezaburzonym przez falę. Odchyłka ta w punkcie o współrzędnej x w chwili czasu t jest rządzona jednowymiarowym równaniem falowym:

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}.$$

Ponieważ w gazach ciśnienie jest proporcjonalne do gęstości, a równanie jest liniowe, więc identyczne równanie mamy także i dla gęstości. Słuszne jest ono także dla położenia cząsteczek gazu wychylonych z położenia równowagi, przy czym wychylenie to jest zgodne z kierunkiem rozchodzenia cię fali i dlatego fale dźwiękowe nazywamy **falami podłużnymi**, w odróżnieniu do fal np. na strunie, kiedy to drgania jej elementów mogą wystąpić w kierunku poprzecznym do kierunku propagacji fali.

Sprawdźmy, czy równanie falowe dopuszcza rozwiązania w postaci **fali harmonicznej**, czyli fali postaci:

$$p(x,t) = A\cos(kx - \omega t)$$

lub też:

$$p(x,t) = A\sin(kx - \omega t).$$

Wielkość A nazywamy **amplituda fali**, symbol k określa tzw. **liczbę falową**, natomiast ω opisuje **częstość** (kołową) **fali**. W opisie teoretycznym wygodniej jest wykorzystywać funkcję wykładniczą

$$p(x,t) = Ae^{i(kx-\omega t)}$$

od czysto urojonego argumentu – możliwe jest to tak długo, jak długo operacje matematyczne wykonywane nad funkcją $p(x,t)$ mają charakter liniowy. Podstawiając harmoniczną postać fali (wyrażoną funkcją *sinus*, *cosinus* lub wykładniczą) do równania znajdujemy, że jest ona jego rozwiązaniem, wszakże pod warunkiem, że wielkości k oraz ω związane będą ze sobą relacją: $\omega^2 = v^2k^2$, zwaną **związkiem dyspersyjnym**. Ponieważ dla wielkości ω mamy dwa rozwiązania: $\omega = \pm\, vk$, możemy więc utworzyć dwa rozwiązania równania falowego:

$$p(x,t) = Ae^{i(kx-\omega t)} = Ae^{ik(x-vt)}, \qquad (1)$$

oraz:

$$p(x,t) = Be^{i(kx+\omega t)} = Be^{ik(x+vt)}. \qquad (2)$$

Uzyskane rozwiązania charakteryzują się powtarzalnością w czasie i w przestrzeni. Periodyczność tę będzie nam łatwiej zobaczyć, jeśli spojrzymy na nią oddzielnie w obu tych wymiarach.

Rozważmy rozwiązanie (1) w ustalonej chwili czasu t. Funkcja $p(x,t)$ przyjmie tę samą wartość w punktach, między którymi różnica Δx współrzędnych będzie spełniała warunek:

$$k\Delta x = 2\pi n ,$$

gdzie n jest dowolną liczbą całkowitą. Najmniejszą taką różnicę Δx nazywamy **długością λ fali** i łączymy ją z liczba falową k związkiem:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} .$$

Podobnie, jeśli ustalimy położenie x w przestrzeni i będziemy obserwować zaburzenie w czasie, to rozwiązanie (1) będzie przyjmować dokładnie tę samą wartość w chwilach czasu różniących się o wartość Δt spełniająca warunek:

$$\omega \Delta t = 2\pi n .$$

Najmniejszą taką różnicę Δt nazywamy **okresem** T fali i łączymy ją z częstością ω związkiem:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} .$$

Wspomnimy, że obok częstości kołowej ω, mierzonej w radianach na sekundę, do opisu zmienności w czasie stosowana jest też odwrotność okresu, czyli częstość (bez dodatkowego przymiotnika) $\nu = 1/T$ mierzona w jednostkach odwrotności czasu, np. hercach (Hz). I jeszcze jeden termin: argument $kx - \omega t$ nazywamy **fazą** fali.

Przyjrzyjmy się teraz wielkości v występującej w równaniu falowym. Jeśli wyobrazimy sobie, że np. funkcja $p(x,t)$ w rozwiązaniu (1) w pewnej chwili czasu t_0 osiąga maksymalną wartość w punkcie o współrzędnej x_0, przy czym wartość fazy $x - vt$ wynosi $\xi_0 = x_0 - vt_0$, to po czasie Δt tę samą wartość $\xi_0 = x_0 + v\Delta t - v(t_0 + \Delta t)$, a więc i maksimum funkcji, znajdziemy w punkcie o współrzędnej $x_0 + v\Delta t$, co oznacza, że maksimum przesunie się w kierunku dodatnim osi X z prędkością v, którą dlatego nazywamy **prędkością fali**. Rozumując podobnie stwierdzamy, że rozwiązanie (2) opisuje propagację fali z tą samą prędkością v w kierunku przeciwnym do osi X. Ponieważ prędkość v opisuje propagację powierzchni stałej fazy $kx \pm \omega t$, więc nazywamy ją również **prędkością fazową** v_f i, jak pokazaliśmy, definiujemy związkiem:

$$v_f = \frac{\omega}{k} = \lambda\nu = v .$$

Parametr v określony jest własnościami ośrodka, w którym propaguje się fala. W przypadku fali głosowej w gazie, w warunkach, w których możemy uznać ten gaz za doskonały, a więc przy niskich ciśnieniach i dla temperatur zazwyczaj istotnie wyższych od temperatury zera bezwzględnego, parametr ten wynosi:

$$v = \sqrt{\frac{\kappa R}{\mu} T} ,$$

gdzie T jest temperaturą absolutną, κ stosunkiem C_p/C_V, a więc stosunkiem ciepła właściwego przy stałym ciśnieniu do ciepła właściwego przy stałej objętości, wielkość R to tzw. uniwersalna stała gazowa, a wielkość μ jest masą molową gazu. Wzór ten dobrze zgadza się wynikami pomiarów dla powietrza w warunkach, jakie spotykamy na co dzień.

Krzywe Lissajous

Wykorzystanie oscyloskopu w trybie z podstawą czasu w omawianym doświadczeniu pozwala obserwować w czasie rozwiązanie równania falowego w ustalonym punkcie przestrzeni, a przy wprowadzeniu sygnałów z głośnika i mikrofonu ich wzajemną relację. Tę że relację można także obserwować w innym trybie pracy oscyloskopu. Otóż, sygnał napięciowy docierający do oscyloskopu z generatora można opisać jako drganie harmoniczne postaci:

$$U = U_0 \sin\left(\omega t + \alpha\right),$$

podczas gdy sygnał docierający z mikrofonu ma kształt:

$$V = V_0 \sin\left(\omega t + \beta\right).$$

Wielkości α oraz β to są fazy związane z opóźnieniem na kablu dla sygnału z generatora oraz opóźnienie na kablu i opóźnienie związane z propagacją fali dźwiękowej między głośnikiem a mikrofonem dla sygnału docierającego z mikrofonu. Rugując z obu równań czas, otrzymujemy związek między napięciami V_x i V_y:

$$\left(\frac{U}{U_0}\right)^2 - 2\frac{UV}{U_0V_0}\cos\left(\alpha-\beta\right) + \left(\frac{V}{V_0}\right)^2 = \sin^2\left(\alpha-\beta\right),$$

który, w prostokątnym układzie odniesienia na płaszczyźnie (U,V) w ogólnym przypadku przedstawia elipsę, której środek znajduje się w początku układu odniesienia, ale osie nie są równoległe do osi układu (elipsa jest „obrócona”). Przy zwiększaniu odległości między głośnikiem a mikrofonem, zwiększamy fazę β. W szczególności, gdy różnica $\alpha - \beta$ faz jest wielokrotnością liczby π, to elipsa ta degeneruje się do linii prostej.

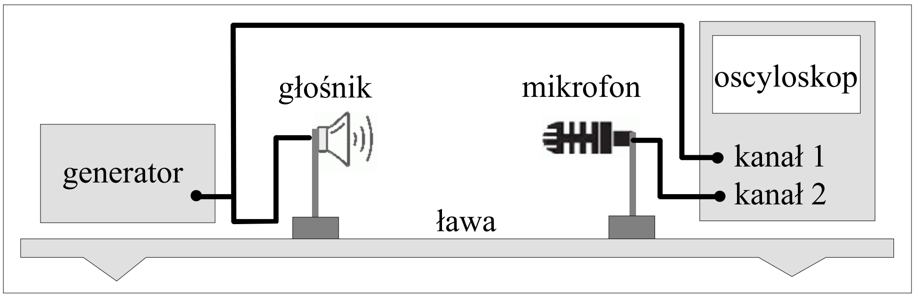
Masz do dyspozycji
- generator akustyczny;
- głośnik;
- mikrofon;
- ławę z miarką, na której umieszczony jest głośnik i mikrofon;
- oscyloskop;

W ćwiczeniu głośnik emituje falę dźwiękową o wysokiej częstości, niesłyszalną dla ucha.

Wykonanie ćwiczenia

Opóźnienie między sygnałami z mikrofonu i głośnika można wyznaczyć na oscyloskopie na dwa sposoby:
- wykorzystując dostępne wśród funkcji oscyloskopu kursory, które pozwalają mierzyć na osi czasu pozycję wybranych punktów sygnałów;
- zliczając liczbę długości fali, bądź jej części (połówek, ćwiartek,…), o jaką sygnał z głośnika wyprzedza sygnał z mikrofonu.

Część I
- Zestaw obwód według schematu na Rysunku 1.



Rys. 1. Schemat układu pomiarowego

- Ustaw oscyloskop w trybie YT (w trybie z podstawą czasu) – upewnij się, że na ekranie widzisz odpowiedzi z obu kanałów.
- Zmieniając częstość sygnału wytwarzanego przez generator, poszukaj sygnału z mikrofonu w okolicy 40 kHz.
- Sprawdź, czy sygnał z mikrofonu przesuwa się względem sygnału z głośnika przy zmianie odległości między głośnikiem a mikrofonem.
- Dla szeregu pozycji mikrofonu zmierz, wykorzystując funkcję kursorów, położenie na osi czasu sygnału z mikrofonu.
- Powtórz pomiary przy częstości w okolicy 50 kHz.
- Zastanów się nad problemem dokładności pomiaru czasu za pomocą oscyloskopu.

Część II
- Ustaw oscyloskop w trybie XY – upewnij się, że na ekranie widzisz elipsę.
- Sprawdź, czy przy zmianie odległości między głośnikiem a mikrofon zmienia się kształtu elipsy.

- Dla szeregu położeń mikrofonu zmierz jego pozycję przy wybranych kształtach elipsy.
- Powtórz pomiary przy drugiej częstości dźwięku.
- Zastanów się nad problemem dokładności z jaką, obserwując ekran oscyloskopu, zliczasz wielokrotności długości, połówek, ćwiartek,... fali.
- Odnotuj temperaturę panującą w pracowni.

Jeśli masz kłopoty z obsługą oscyloskopu, poproś osobę prowadzącą ćwiczenie o pomoc.

Analiza wyników pomiarów

Analiza danych winna uwzględniać następujące elementy.

- Ustalenie realistycznych, dopuszczalnych błędów granicznych wielkości bezpośrednio mierzonych i wyznaczenie odpowiadających im niepewności standardowych – pamiętaj, że zdolność rozdzielcza przyrządu nie musi gwarantować sensownych błędów granicznych. Oczywiście możesz też od razu oszacować niepewności standardowe, bez przechodzenia przez etap błędów granicznych. Jednym z rezultatów tej analizy powinno być wyznaczenie niepewności pomiarów na oscyloskopie.
- Wyznaczenie, z wyników pomiarów uzyskanych w części I oceny, wraz z jej niepewnością, prędkości propagacji fali dźwiękowej dla każdej z częstości.
- Sprawdzenie zgodności uzyskanych ocen.
- Wyznaczenie najlepszej oceny prędkości, wraz z jej niepewnością, ze wszystkich pomiarów w części I, jeśli uznasz takie postępowanie za stosowne.
- Wyznaczenie, z wyników pomiarów uzyskanych w części II oceny, wraz z jej niepewnością, prędkości propagacji fali dźwiękowej dla każdej z częstości.
- Sprawdzenie zgodności uzyskanych ocen.
- Wyznaczenie najlepszej oceny prędkości, wraz z jej niepewnością, ze wszystkich pomiarów w części II, jeśli uznasz takie postępowanie za stosowne.
- Wyznaczenie najlepszej oceny prędkości, wraz z jej niepewnością, z pomiarów w części I oraz II, jeśli uznasz takie postępowanie za stosowne.
- Porównanie uzyskanej oceny prędkości z wartością modelową.

Jeśli na którymś z etapów analizy prowadzisz dopasowanie modelowej zależności do danych metodą najmniejszych kwadratów, **obowiązkowo** podaj jawną postać wielkości minimalizowanej, jako że postać ta jednoznacznie wyznacza oceny poszukiwanych współczynników modelowej zależności wraz z ich macierzą kowariancji i nie musisz cytować stosownych wzorów dla tych obiektów. Pamiętaj, że niezbędnym elementem tego podejścia jest uzasadnienie wyboru zmiennej zależnej i niezależnej, a także sprawdzenie, jeśli to możliwe, zgodności danych z modelem metodą testu χ^2. Pamiętaj też, że wersja metody najmniejszych kwadratów, którą poznałeś na wykładzie i która jest powszechnie prezentowana w wielu książkach i na sieci WWW, wymaga wyników pomiarowych, z których każdy uzyskany jest w niezależnym akcie pomiarowym. **Nie mają takiego charakteru wielkości uzyskane np. w wyniku odejmowania jednej ustalonej wartości od wszystkich wyników pomiarów, jeśli wartość odejmowana pochodzi z pomiaru.**

Obok wykresu ukazującego dane doświadczalne, wraz z ich niepewnościami oraz dopasowaną zależnością modelową, do dobrej praktyki należy także przedstawienie reszt z tego dopasowania. Rysunek taki pokazuje, w powiększeniu, jakość dopasowania, a także dostarcza dodatkowego wglądu, którego nie znajdziemy ani na wykresie dopasowanej krzywej, ani w wartości minimalnej sumy kwadratów reszt: uzyskany wzór reszt może dostarczyć sugestii odnośnie do trafności wybranej zależności modelowej.

Literatura przedmiotu

- J. Ginter, *Fizyka fal – Fale w ośrodkach jednorodnych, Fale w ośrodkach niejednorodnych*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 1993;
- Sz. Szczeniowski, *Fizyka doświadczalna*, cz. I, *Mechanika*, PWN, Warszawa, 1972,
- B. Jaworski i A. Dietłaf, *Kurs fizyki*, tom 3, *Procesy falowe, optyka, fizyka atomowa i jądrowa*, PWN, Warszawa, 1981, s. 469,

- D. Holliday, R. Resnick i J. Walker, *Podstawy fizyki*, tom 3, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 2008;
- A. Zięba, *Analiza danych w naukach ścisłych i technice*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 2013.

Dodatkowe uwagi odnośnie do raportu

W raporcie należy zamieścić, w stosownie dobranych tabelach, wszystkie surowe wyniki pomiarów tak, aby sięgając jedynie do raportu i bez potrzeby odwoływania się do dziennika doświadczenia można było wykonać pełną i niezależną analizę Twych danych. Zadbaj o wierne przeniesienie wszystkich wartości do raportu.

Nim przygotujesz raport, zaznajom się z uwagami zawartymi w opracowaniu *Instrukcja – Jak pisać raport końcowy* oraz z przykładową realizacją tych uwag w postaci *Przykładowy raport końcowy*. Materiały te zamieszczone są na stronie http://anipw.igf.fuw.edu.pl Pracowni wstępnej. Wymagania ukazane w tych opracowaniach będą bezwzględnie egzekwowane przy sprawdzaniu Twego raportu. W szczególności pamiętaj o konwencji odnoszącej się do precyzji przedstawiania niepewności, a co za tym idzie, również wartości wielkości zmierzonej.

Absolutnie zalecane jest świadome przyjrzenie się redakcji tekstu, tabel, rysunków i wzorów, sposobów ich numerowania, tytułowania i opisywania w dowolnym, ale wydanym przez uznane wydawnictwo, akademickim podręczniku do fizyki, jak również zajrzenie do kilku publikacji w różnych czasopismach naukowych, co może Ci ułatwić podjęcie decyzji co do podziału Twego raportu na części.

Pytania i zadania definiujące wymagania do ćwiczenia

Problem 1. Ile wynosi prędkość dźwięku w próżni?

Problem 2. Równanie fali dźwiękowej, opisującej wychylenia ψ cząsteczek powietrza z położenia równowagi, ma postać $\psi(x,t) = A\cos(kx - \omega t)$, gdzie $A = 6{,}0 \cdot 10^{-2}$ mm oraz $k = 5{,}3\ \mathrm{m}^{-1}$.

- Oblicz stosunek amplitudy drgań cząsteczek ośrodka i długości fali.
- Podaj wyrażenie na maksymalną prędkość drgań cząsteczek ośrodka i oblicz jej stosunek do prędkości fali.

Problem 3. Pokaż, że tor punktu o współrzędnych $x(t) = A\sin(\omega t)$, $y(t) = A\cos(2\omega t)$, to parabola.

Wskazówka: $\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$.

Problem 4. Wzdłuż osi OX rozchodzi się fala dźwiękowa, w której wychylenie ξ cząstek gazu z położenia równowagi opisane jest zależnością $\xi(x,t) = A\cos(kx - \omega t)$, natomiast wzdłuż osi OY propaguje się fala, pod wpływem której wychylenia ζ cząstek mają postać $\zeta(y,t) = A\cos(ky - \omega t)$. Opisz ruch cząstek gazu w płaszczyźnie XY.

Pytania i zadania przybliżające, uzupełniające lub poszerzające treść ćwiczenia

Problem 5. Fala akustyczna rozchodzi się w atmosferze ziemskiej pionowo do góry. W jakim czasie dotrze ona na wysokość $L = 10$ km, jeśli na powierzchni ziemi panuje temperatura $t_1 = 16°$, a w atmosferze ziemskiej, traktowanej jako gaz doskonały, temperatura maleje o 6° na odcinku jednego kilometra i ten gradient jest stały? Wykładnik adiabaty κ dla powietrza wynosi 1,4, masa cząsteczkowa μ powietrza to 29 g/mol, a stała Boltzmanna ma wartość $k_B = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ J/K.

Problem 6. Dwa ciągi harmonicznych fal dźwiękowych biegną w tym samym kierunku z prędkościami v_1 i v_2. Ich długości fal wynoszą odpowiednio λ_1 i λ_2. Znajdź prędkość u, z jaką przesuwają się w przestrzeni te punkty, w których drgania odpowiadające każdej z fal znajdują się w jednakowej fazie. Znajdź odległość Δ między dwoma takimi punktami.

Opracował: NN.

Uzupełnił: Roman J. Nowak, 16 stycznia 2017.